Docente: Anderson Alexander Yela B	Asignatura: Matemáticas	Grado: 10	Periodo: 3	Mes:
Nombre del estudiante:				

GRAFICAS TRIGONOMÉTRICAS

La gráfica de una función nos da una mejor idea de su comportamiento. Entonces, con base a los siguientes análisis de las funciones seno, coseno y ciertas transformaciones de estás, comprenderemos algunos datos importantes.

Partiendo de una circunferencia unitaria y sus rotaciones en cuanto los ángulos medidos hasta completar un giro, se deduce que los puntos interceptados entran la rotación y el valor del rango generan una coordenada por donde pasa la gráfica describiendo su movimiento.

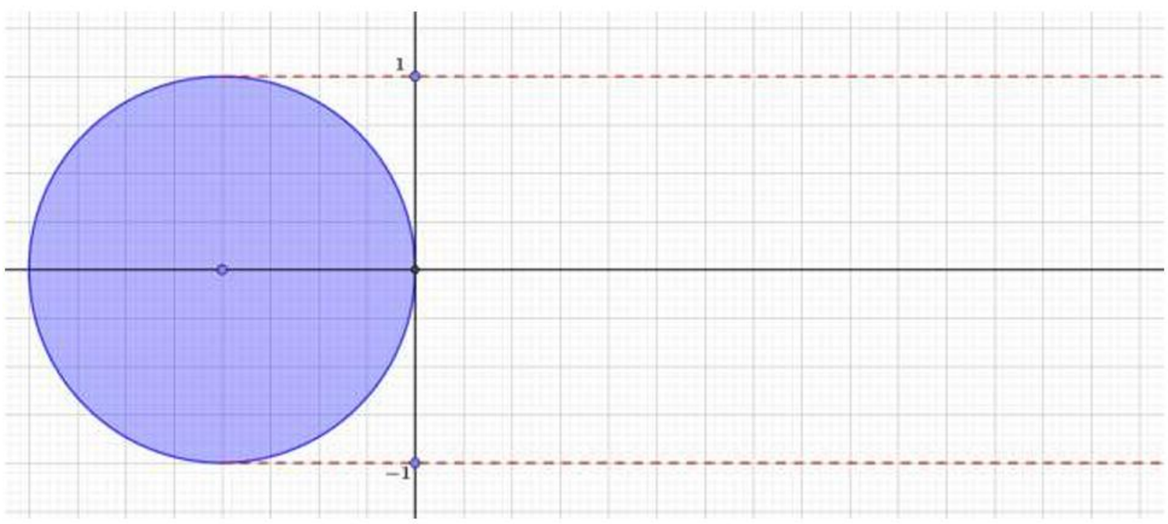
Entonces, las funciones seno y coseno son periódicas de acuerdo con la siguiente definición: Una función f es periódica si hay un ciclo completo dentro de un giro completo de la circunferencia unitaria, a lo que denominamos como periodo completo.

PROPIEDADES PERIÓDICAS DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Las funciones seno y coseno tienen período 2π:

$$\operatorname{sen}(t + 2\pi) = \operatorname{sen} t \qquad \cos(t + 2\pi) = \cos t$$

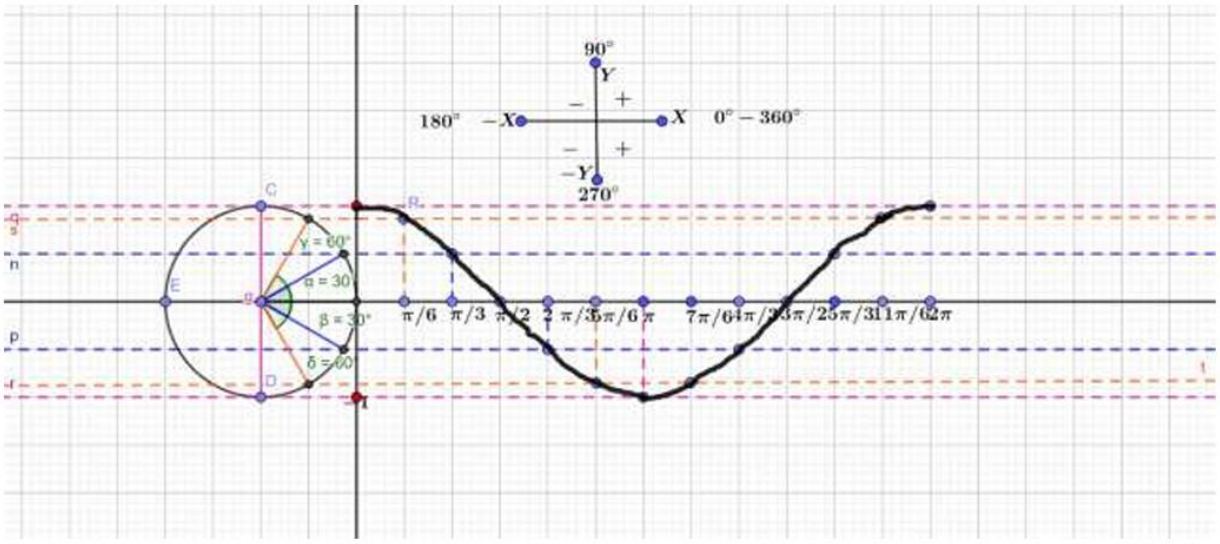
El círculo unitario es un círculo de radio 1 con centro en el origen del sistema de coordenadas, esto es, el punto (0,0) Cada número real de la recta numérica se asocia con las coordenadas de un punto en el círculo unitario llamado punto circular. Para eso, luego, localizamos el 0 en la recta numérica de manera que coincida con el punto (1, 0) en la unidad del círculo. Como el radio del círculo unitario es 1, entonces la circunferencia del círculo es, entonces, el eje real positivo se enrolla en sentido contrario a las manecillas del reloj y el eje real negativo se enrolla en el sentido de las manecillas del reloj. De manera, que cada número real de la recta real se asocia con un sólo punto circular del círculo unitario.



Ahora miremos las funciones seno y coseno dentro de un dominio de $[0,2\pi]$ teniendo en cuenta la rotación de dicho circulo unitario con base a una escala de 30° en 30° mostrado en radianes, así como los valores adquiridos dentro de un rango de $[-1,1]$.

La siguiente grafica es tomada y diseñada desde GeoGebra y es comprendida como

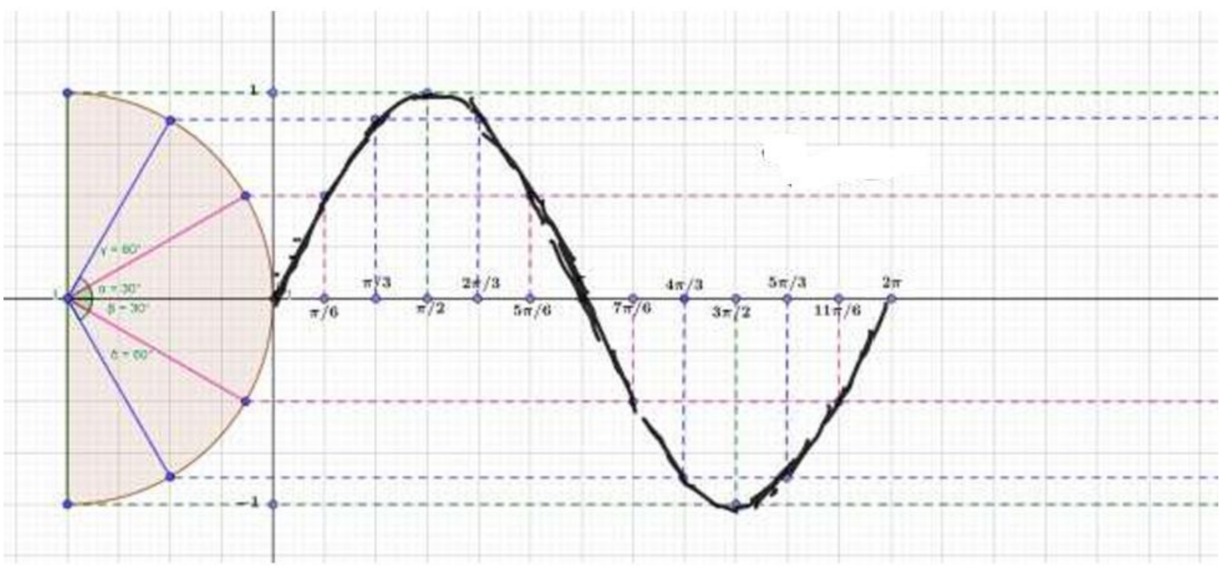
$y = \cos x$



https://www.geogebra.org/classic/xwgvkf4u

El ciclo fundamental de la función coseno del ángulo comienza en 0 y termina en 2π. Dominio: el conjunto de números reales. Alcance: el conjunto de números mayores o iguales que -1 hasta los números menores o iguales que 1. Cruza el eje de “y” en: (0,1). El eje de referencia es: el eje “x”. El punto máximo es: (0,1) y (2π,1). El punto mínimo es: (π, -1). Su período: 2π

$y = sen\ x$



https://www.geogebra.org/classic/skctfvzr

Gráficas de transformaciones de las funciones seno y coseno

A continuación consideramos gráficas de funciones que son transformaciones de las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficar de la Sección 2.5 son muy útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender aplicaciones a situaciones físicas tales como movimiento armónico (vea Sección 5.6), pero algunas de ellas son gráficas de atractivo aspecto que son interesantes por sí solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos la letra x y escribimos $y = \text{sen}\ x$, $y = \cos x$, $y = \tan x$ y así sucesivamente para denotar estas funciones.

EJEMPLO 1 | Curvas de coseno

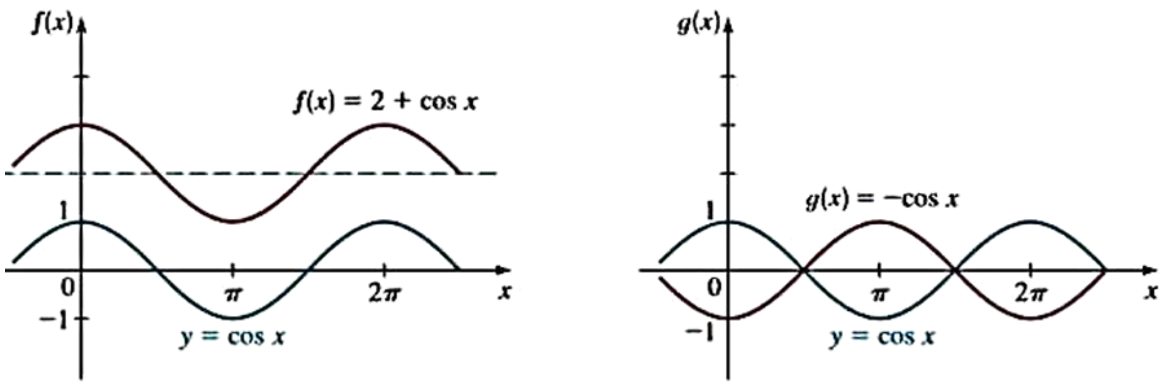
Trace la gráfica de cada función siguiente.

(a) $f(x) = 2 + \cos x$ (b) $g(x) = -\cos x$

SOLUCIÓN

(a) La gráfica de $y = 2 + \cos x$ es la misma que la gráfica de $y = \cos x$, pero desplazada 2 unidades (vea Figura 4(a)).

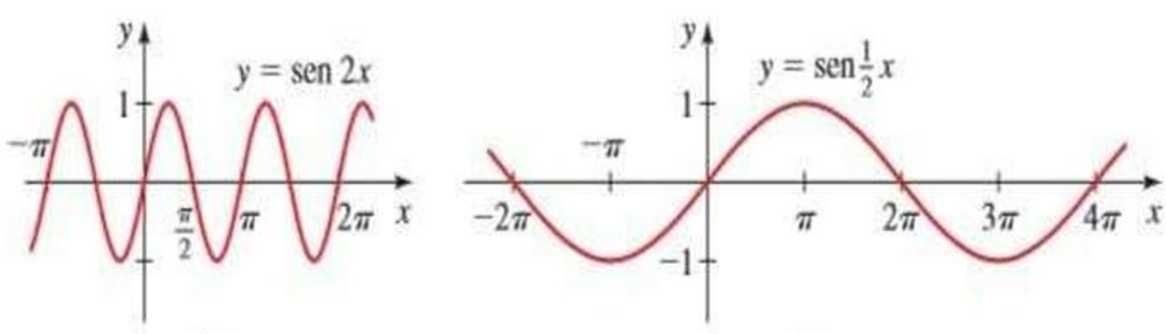
(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.



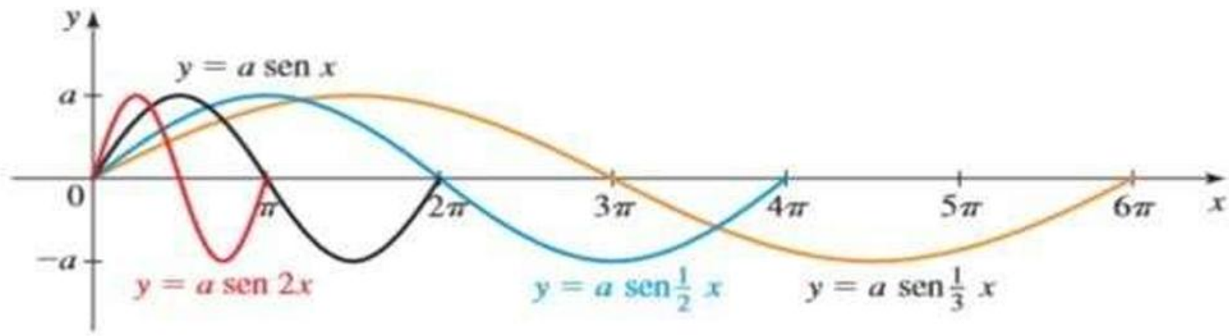
(a) (b)

> **CURVAS SENO Y COSENO**
>
> Las curvas seno y coseno
>
> $$y = a \operatorname{sen} kx \qquad \text{y} \qquad y = a \cos kx \qquad (k > 0)$$
>
> tienen **amplitud** $|a|$ y **período** $2\pi/k$.
>
> Un intervalo apropiado en el cual graficar un período completo es $[0, 2\pi/k]$.

Para ver cómo afecta el valor de k a la gráfica de $y = \operatorname{sen} kx$, grafiquemos la curva seno $y = \operatorname{sen} 2x$. Como el período es $2\pi/2 = \pi$, la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le \pi$ (vea Figura 8(a)). Para la curva seno $y = \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$, el período es $2\pi \div \frac{1}{2} = 4\pi$, de modo que la gráfica completa un período en el intervalo $0 \le x \le 4\pi$ (vea Figura 8(b)). Vemos que el efecto es *contraer* la gráfica horizontalmente si $k > 1$ o *alargar* la gráfica horizontalmente si $k < 1$.



(a) (b)



EJEMPLO | Amplitud y período

Encuentre la amplitud y período de cada función y trace su gráfica.

(a) $y = 4 \cos 3x$ **(b)** $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$

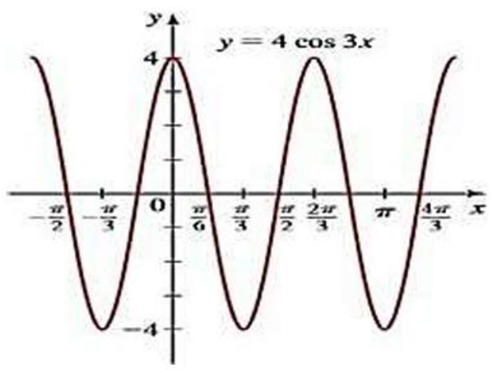
SOLUCIÓN

(a) Obtenemos la amplitud y período a partir de la forma de la función como sigue:

$$\text{amplitud} = |a| = 4$$

$$y = 4 \cos 3x$$

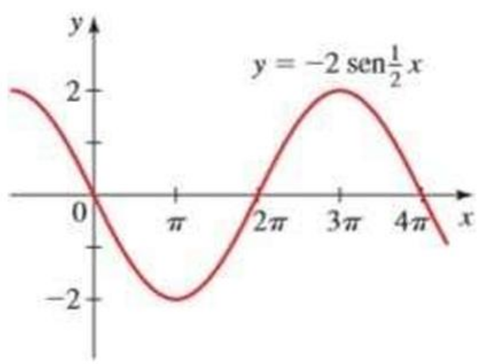
$$\text{período} = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3}$$



(b) Para $y = -2 \operatorname{sen} \frac{1}{2}x$,

$$\text{amplitud} = |a| = |-2| = 2$$

$$\text{período} = \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi$$



Ejercicios (Parte 1)

Graficar las siguientes transformaciones de funciones trigonométricas

$\boldsymbol{A.\ y = 2\cos(2x - \pi) + 3}$

$\boldsymbol{B. y = 3sen\ x - 1}$

$\boldsymbol{C. y = -sen\ (x + \pi)}$

$\boldsymbol{D. y = cos\ (3x) - 1.5}$

Identidades trigonométricas

Las identidades trigonométricas son igualdades que involucran funciones trigonométricas y se verifican para cualquier valor permitido de la variable o variables que se consideren, es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los cuales se aplican las funciones.

Para la simplificación de expresiones trigonométricas que escribamos la misma expresión en formas diferentes. A veces es posible reescribir una expresión de aspecto complicado como una mucho más sencilla. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos factorización, denominadores comunes y las fórmulas de productos notables o diferencias de cuadrados perfectos. En el siguiente cuadro tendremos algunas identidades fundamentales y su clasificación.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Ejemplo 1: Simplificación de una expresión trigonométrica $\boldsymbol{cos\ t + tan\ t . sen\ t}$

Solución: Empezamos por reescribir en términos de seno y coseno

$$\cos t + \tan t \,.\, sen\, t = \cos t + \left(\frac{sen\ t}{cos\ t}\right).\, sent \qquad \rightarrow Identidad\ reciproca$$

$$= \frac{cos^2 t + sen^{\,2} t}{cos\ t} \qquad \rightarrow Común\ denomidor$$

$$= \frac{1}{cos\ t} \qquad \rightarrow Identidad\ pitagórica$$

$$= Sec\ t \qquad \rightarrow Identidad\ reciproca$$

Ejemplo 2: Simplificación por combinación de fracciones

Solución: Combinamos las fracciones usando denominadores comunes.

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} + \frac{cos\ x}{1+cos\ x}$$

$$\frac{sen\ x}{cos\ x} + \frac{cos\ x}{1 + cos\ x} = \frac{Sen\ x(1 + sen\ x\ ) + cos^2 x}{Cos\ x(1 + sen\ x)}$$

$$= \frac{sen\ x + sen^2 x + cos^2 x}{cos\ x\ (1 + sen\ x)}$$

$$= \frac{Sen\, x + 1}{cos\, x\,(1 + sen\, x)}$$

$$= \frac{1}{cos\, x}$$

$$= Sec\, x$$

Guía para demostrar identidades trigonométricas

1. **Empezar con un lado:** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.

2. **Usar identidades conocidas**: Use álgebra y las identidades que conozca para combinar el lado con que empezó. Lleve las expresiones fundamentales para simplificar expresiones.

3. **Convertir en senos y cosenos:** si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Ejercicios (parte 2)

1. La expresión $cos^2 x\, +\, sen^2\, x\, =\, 1$ se puede expresar como

   A. $(sen\ x$ +cos$x)$ $(sen\ x - cosx) = 1$
   B. $(1\, - cosx)(1 + cosx)\, =\, sen^2 x$
   C. $(sen\, x\, + cosx)^2\, =\, 1$
   D. (1 +cos$x$) (1+cos$x$) = $sen\ 2\ x$

2. Al simplificar términos en una demostración de identidades trigonométricas podemos

   A. Despejar variables de un lado a otro
   B. Simplificar en términos de seno y coseno a ambos lados de la igualdad al tiempo
   C. simplificar en términos de seno y coseno a un solo lado de la igualdad, para llegar al otro
   D. despejar cada lado de la igualdad de forma independiente

3. La identidad $\boldsymbol{tanx\, .\, cotx}$ es

   A. 0 porque se simplifican todas sus expresiones
   B. 1 porque se simplifican todos sus términos de seno y coseno
   C. Imposible de hacer o demostrar porque
   D. -1 al simplificar

4. Demostrar o simplificar las siguientes expresiones trigonométricas

   A. $\frac{cos\, u\, sec\, u}{tan\, u} = \mathbf{co\, t}\, u$

   B. $\frac{tan\, x}{sec\, x} = senx$

   C. $\frac{1 + sen\, x}{1 - sen\, x} - \frac{1 - sen\, x}{1 + sen\, x} = \mathbf{4ta\, n}\, x\, \mathbf{se\, c}\, x$

   D. $2cos^2 x - 1 = 1 - 2sen^2 x$