	DISEÑO DEL SERVICIO	Código: M1-FOR07
		Versión: 02 de agosto de 2022
	GUIA DE NIVELACIÓN PRIMER PERÍODO GRADO DÉCIMO	Año escolar: 2024 - 2025

Docente: José Ignacio García	Asignatura: Matemáticas	Grado: 10º A - B	Periodo: PRIMERO	Mes: Noviembre

MEDICIÓN DE ÁNGULOS

Un ángulo ***AOB*** está formado por dos rayos *R1* y *R2* con un vértice común ***O*** (vea Figura 1). Con frecuencia interpretamos un ángulo como una rotación del rayo R1 sobre R2. En este caso, R1 recibe el nombre de **lado inicial** y R2 es el **lado terminal** del ángulo. Si la rotación es en el sentido contrario al giro de las manecillas de un reloj, el ángulo es considerado como positivo y, si es en el sentido de las manecillas del reloj, el ángulo es considerado como negativo.

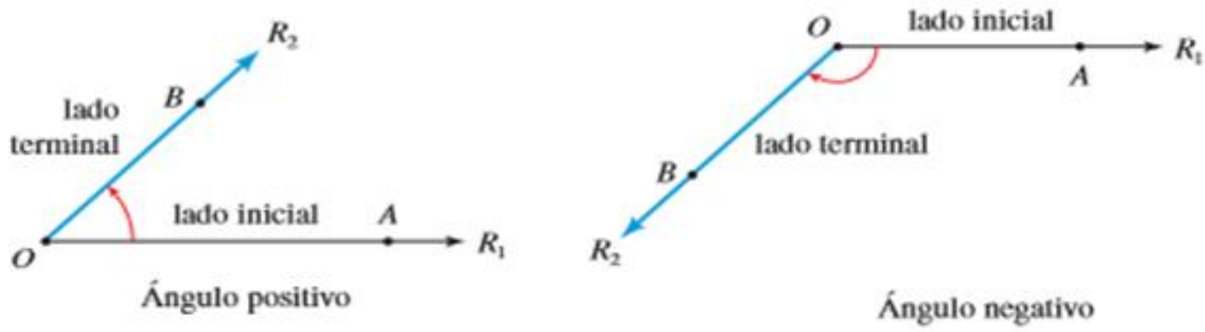
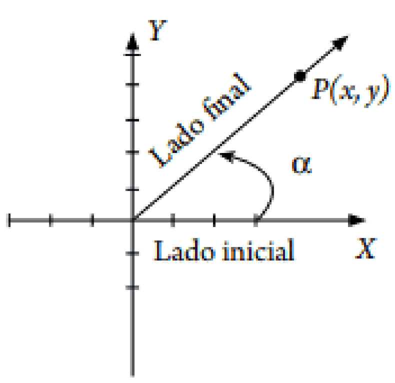


FIGURA 1

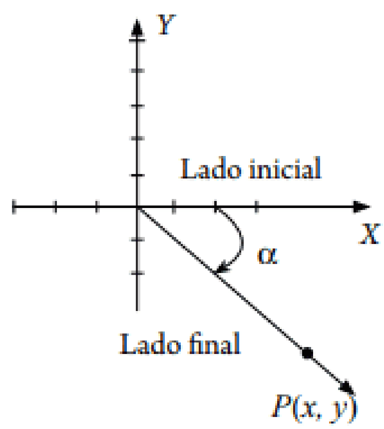
La medida de un ángulo es la cantidad de rotación alrededor del vértice para mover R1 sobre R2. Intuitivamente, esto es cuánto es lo que "abre" el ángulo. Una unidad de medida para ángulos es el **grado**. Un ángulo de medida 1 grado se forma al girar el lado inicial **1/360** de una revolución completa. En cálculo y otras ramas de matemáticas, se usa un método más natural de medir ángulos y es la medida en **radianes**. La cantidad que abre un ángulo se mide a lo largo del arco de una **circunferencia de radio 1** con su centro en el vértice del ángulo.

ÁNGULOS EN POSICIÓN NORMAL

En ambos casos podemos tomar las manecillas del reloj para asociarlos, a favor de estas es negativo y en contra a las manecillas positivo.

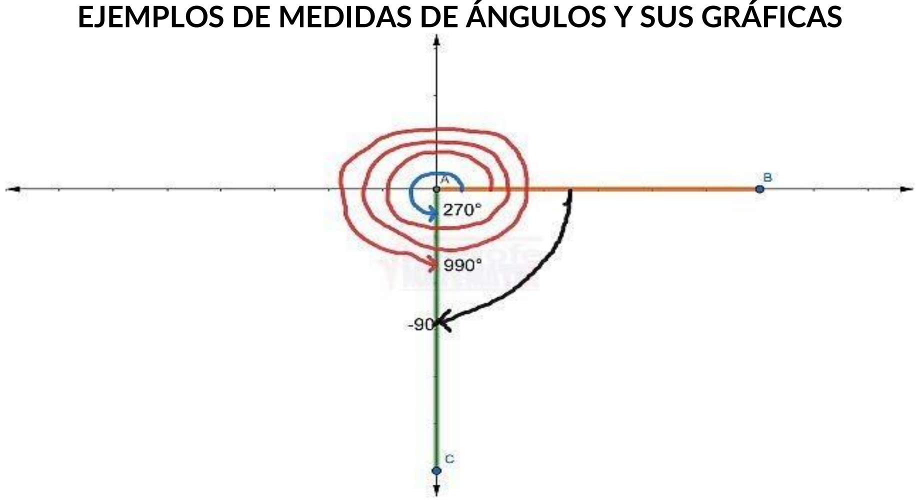


Ángulo en posición normal positivo.

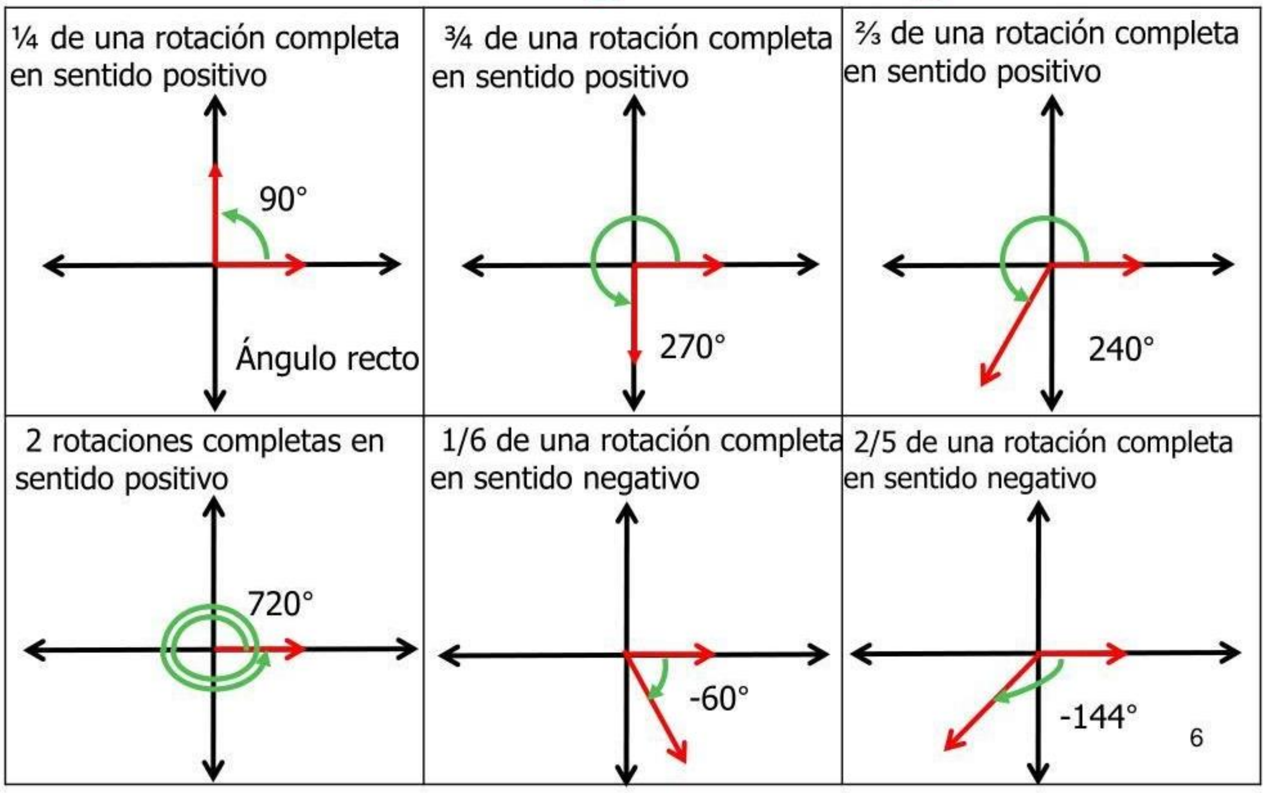


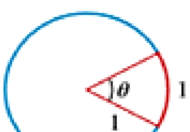
Ángulo en posición normal negativo.

EJEMPLOS DE MEDIDAS DE ÁNGULOS Y SUS GRÁFICAS



Medida de ángulos en grados





Medida de $\theta = 1$ rad
Medida de $\theta \approx 57.296°$

FIGURA 4

RELACIÓN ENTRE GRADOS Y RADIANES

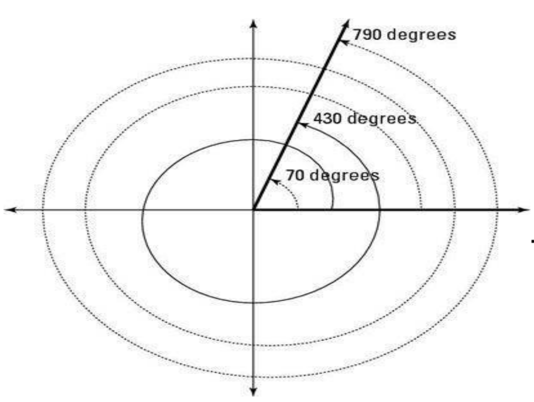
$$180° = \pi \text{ rad} \qquad 1 \text{ rad} = \left(\frac{180}{\pi}\right)^{\circ} \qquad 1° = \frac{\pi}{180} \text{ rad}$$

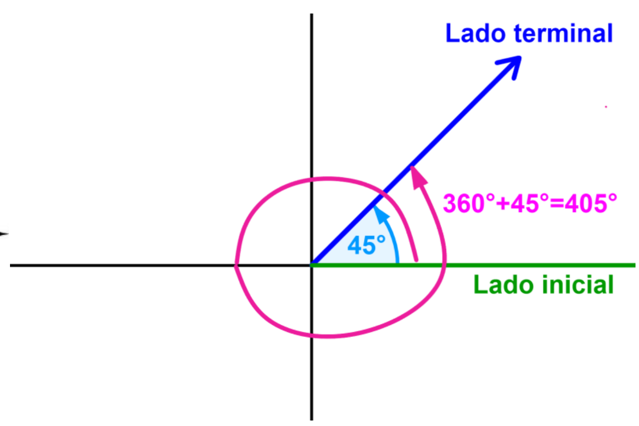
1. Para convertir grados a radianes, multiplique por $\frac{\pi}{180}$.
2. Para convertir radianes a grados, multiplique por $\frac{180}{\pi}$.

{¿

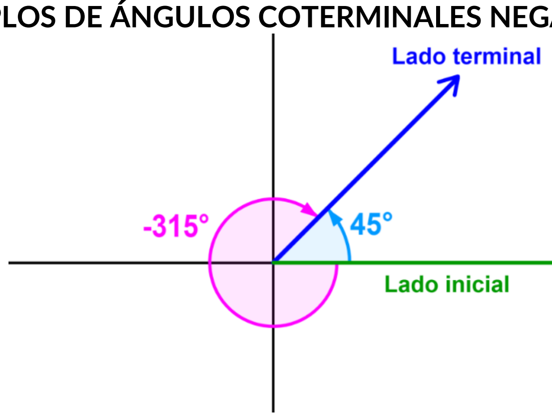
ÁNGULOS COTERMINALES

Son aquellos ángulos que comparten el mismo lado inicial y terminal. Existen ángulos coterminales positivos y negativos, en ambos casos se pueden obtener infinitos ángulos coterminales a partir de uno solo.



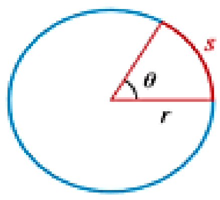


EJEMPLOS DE ÁNGULOS COTERMINALES NEGATIVOS



LONGITUD DE ARCO DE UNA CIRCUNFERENCIA

Un ángulo cuya medida en radianes es está subtendido por un arco que es la fracción de la circunferencia de un círculo. Entonces, en una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende al ángulo es:



$$s = \frac{\theta}{2\pi} \times \text{circunferencia de círculo}$$

$$= \frac{\theta}{2\pi}(2\pi r) = \theta r$$

LONGITUD DE UN ARCO CIRCULAR

En una circunferencia de radio r, la longitud s de un arco que subtiende un ángulo central de θ radianes es

$$s = r\theta$$

Ejemplo **Longitud de arco y medida angular**

a) Encuentre la longitud de un arco de un círculo con radio 10 m que subtiende un ángulo central de 30°.

b) Un ángulo central θ en un círculo de radio 4 m es subtendido por un arco de longitud 6 m. Encuentre una medida de θ en radianes.

Solución

a) Del ejemplo 1(b) se ve que $30° = \pi/6$ rad. Por lo tanto, la longitud del arco es

$$s = r\theta = (10)\frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{3}\text{ m}$$

La fórmula $s = r\theta$ es verdadera sólo cuando θ se mide en radianes.

b) Por la fórmula $\theta = s/r$, se tiene

$$\theta = \frac{s}{r} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}\text{ rad}$$

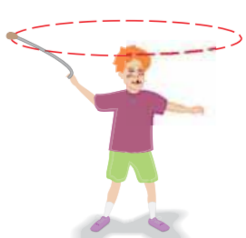
Velocidad lineal y velocidad angular

Suponga que un punto se mueve a lo largo de un círculo de radio r y el rayo desde el centro del círculo al punto cruza θ radianes en el tiempo t. Sea $s = r\theta$ la distancia que viaja el punto en el tiempo t. Entonces la velocidad del objeto está dada por

$$\textbf{Velocidad angular} \quad \omega = \frac{\theta}{t}$$

$$\textbf{Velocidad lineal} \quad v = \frac{s}{t}$$

El símbolo ω es la letra griega "omega."



Ejemplo **Hallar la velocidad lineal y la velocidad angular**

Un niño hace girar una piedra en una honda de 3 pies de largo a una velocidad de 15 revoluciones cada 10 segundos. Encuentre las velocidades angular y lineal de la piedra.

Solución En 10 s, el ángulo θ cambia en $15 \cdot 2\pi = 30\pi$ radianes. Así que la *velocidad angular* de la piedra es

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{30\pi\text{ rad}}{10\text{ s}} = 3\pi\text{ rad/s}$$

La distancia recorrida por la piedra en 10 s es $s = 15 \cdot 2\pi r = 15 \cdot 2\pi \cdot 3 = 90\pi$ pies. Por lo tanto, la *velocidad lineal* de la piedra es

$$v = \frac{s}{t} = \frac{90\pi\text{ pies}}{10\text{ s}} = 9\pi\text{ pies/s}$$

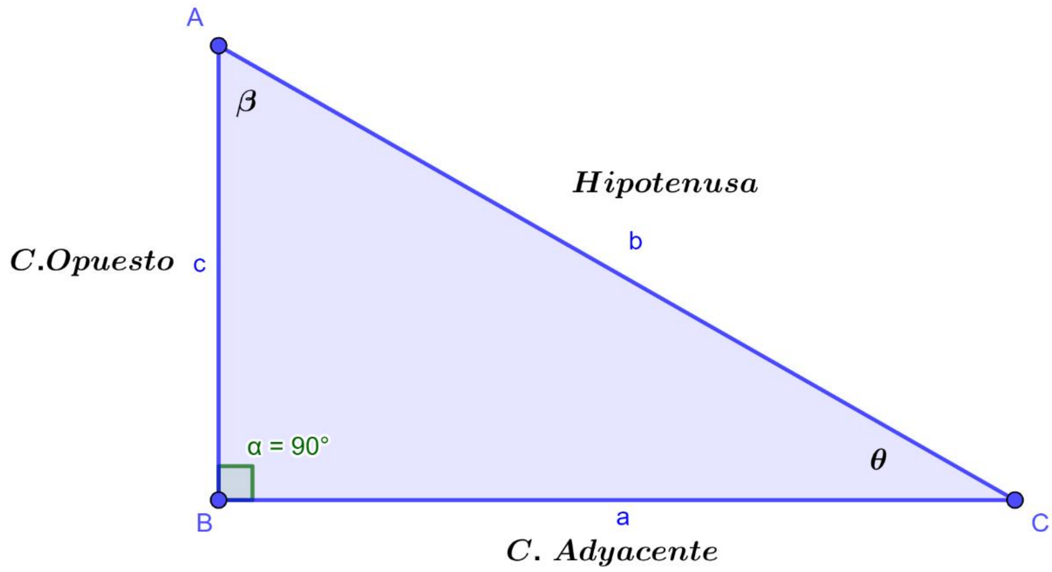
Hay que observarse que la velocidad angular *no* depende del radio del círculo, sino sólo del ángulo θ. Sin embargo, si se conoce la velocidad angular ω y el radio r, se puede encontrar la velocidad lineal como sigue: $v = s/t = r\theta/t = r(\theta/t) = r\omega$.

FUNCIONES TRIGONOMÉTRICAS

Triángulo rectángulo

El triángulo rectángulo es aquel que tiene un ángulo interior que es recto, es decir, mide 90°. Este tipo de triángulo es una de sus clasificaciones de acuerdo a la medida de sus ángulos interiores. La principal característica del triángulo es que, como ampliaremos más adelante, tiene un lado de mayor longitud (llamado hipotenusa) y otros dos denominados catetos cuya unión forma el ángulo recto.

Los triángulos en general, están formados por **3 lados y 3 ángulos**. Además, los **triángulos rectángulos** se llaman así por tener un **ángulo recto** entre sus catetos.
Los lados de un triángulo rectángulo son la hipotenusa y los dos catetos:



¿CÓMO RESOLVER UN TRIÁNGULO RECTÁNGULO?

En este caso es importante tener en cuenta que si no me dan ángulos puedo aplicar el teorema de Pitágoras y hallar las longitudes de sus lados sin problema, teniendo en cuenta que mínimo debo tener dos lados para esto.

$$\boldsymbol{h^2 = Ca^2 + Co^2 \quad Para\ encontrar\ la\ hipotenusa}$$

$$\boldsymbol{Ca^2 = h^2 - Co^2 \quad Para\ encontrar\ el\ cateto\ adyacente}$$

$$\boldsymbol{Co^2 = h^2 - Ca^2 \quad Para\ encontrar\ el\ cateto\ opuesto}$$

En algunos casos el teorema de Pitágoras no se utiliza como punto de partida en la resolución de triángulos rectángulos. Como es en los casos en donde sólo se cuenta con una de sus tres aristas y como **Mínimo** uno de
Entonces con base a esto se procede a enfocar el ángulo agudo que se encuentra opuesto al cateto opuesto y lo usamos como su ángulo principal llamado θ $(theta)$, para establecer las relaciones entre el lado dado con el que se pide, de acuerdo a las relaciones trigonométricas. Así:

$$\sin\theta = \frac{Opuesto}{Hipotenusa} \quad Utilizo\ Seno\ si\ me\ dan\ uno\ de\ estos\ lados\ y\ piden\ el\ otro.$$

$$\cos\theta = \frac{Adyacente}{Hipotenusa} \quad Utilizo\ Coseno\ si\ me\ dan\ uno\ de\ estos\ lados\ y\ piden\ el\ otro$$

$$\tan\theta = \frac{Opuesto}{Adyacente} \quad Utilizo\ Tangente\ si\ me\ dan\ uno\ de\ estos\ lados\ y\ piden\ el\ otro$$

$$\csc\theta = \frac{Hipotenusa}{Opuesto} \quad Es\ la\ función\ reciproca\ de\ Seno$$

$$\sec\theta = \frac{Hipotenusa}{Adyacente} \quad Es\ la\ Función\ reciproca\ de\ Coseno$$

$$\cot\theta = \frac{Adyacente}{Opuesto} \quad Es\ la\ función\ reciproca\ de\ Tangente$$

Taller de práctica

1. Encuentre la medida en radianes del ángulo dado

A. -300° B. 54° C. 96° D. 1200°

2. Encuentra la medida en grados del ángulo con la medida en radianes

A. $-\frac{3\pi}{2}$ B. $\frac{5\pi}{18}$ C. -2 D. 3.4

3. Encuentre dos ángulos coterminales positivos y dos negativos de acuerdo a cada ángulo dado

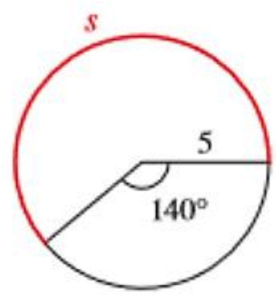
A. $-\boldsymbol{\frac{5\pi}{6}}$ B. -30° C. 75° D. $\frac{11}{6}\pi$

4. Determine si las siguientes parejas de ángulos son o no coterminales

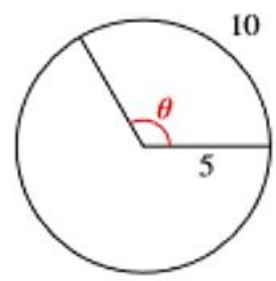
A. 30°, -330° B. $\frac{\pi}{4}, \frac{2}{3}\pi$

5. Desarrolle los siguientes ejercicios con base al tema de longitud de arco.

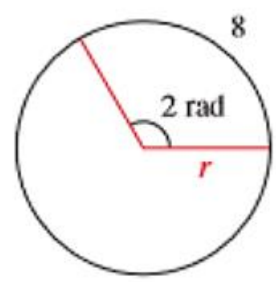
Encuentre la longitud del arc s de la figura.



Encuentre el ángulo θ de la figura.



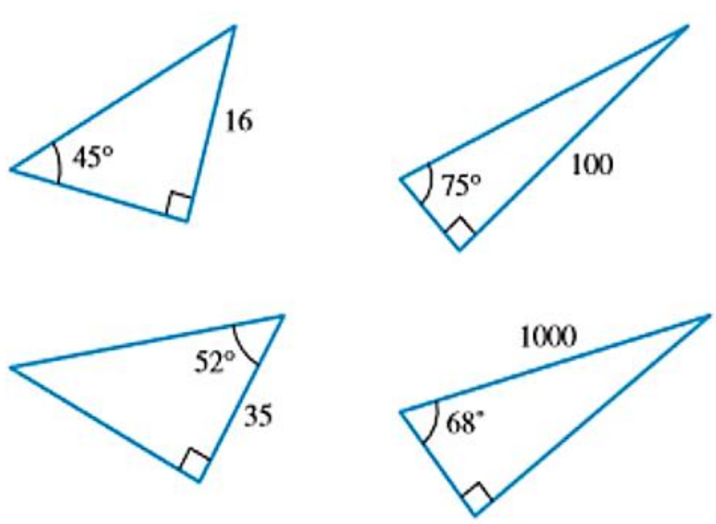
Encuentre el radio r del círculo de la figura.



6. Trace un triángulo que tenga ángulo agudo θ, y encuentre las otras cinco funciones trigonométricas

A. $\boldsymbol{\sec\theta = \frac{20}{10}}$ B. $\cos\theta = \frac{6}{10}$

7. Resuelva los siguientes triángulos rectángulos

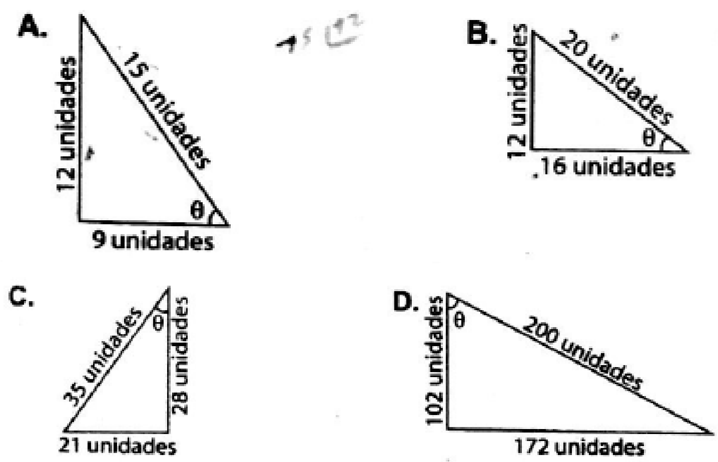


Preguntas tipo ICFES

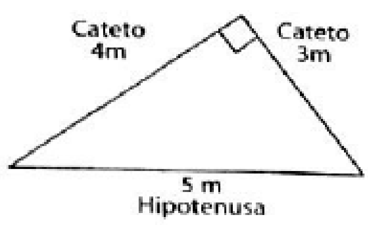
1. Se tiene la siguiente información sobre el cuadrilátero $OPQR$:

   La medida del ángulo $\measuredangle PRO = \gamma$, en términos de α, β, ϕ es
   A. $\gamma = \alpha - \beta - \ \phi - 180°$
   B. $\gamma = \alpha - \beta - \ \phi$
   C. $\gamma = \alpha + \beta + \ \phi$
   D. $\gamma = \alpha + \beta + \phi - 180°$

2. La cosecante de un ángulo en una triangulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa y el cateto opuesto al ángulo; la secante de un ángulo en una triangulo rectángulo se define como la razón entre la hipotenusa y el cateto adyacente. ¿En cuál de los siguientes triángulos se cumple que $\csc(\theta) = 1{,}25$ y $\sec(\theta) = 1{,}66$?



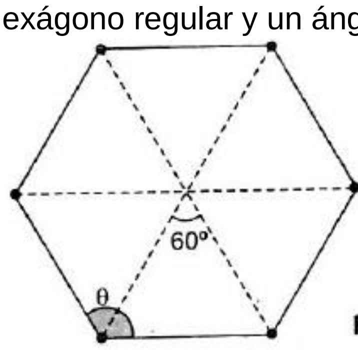
3. Un granjero quiere cultivar un terreno triangular, como se muestra en la figura.



Figura

   Para calcular el área del terreno, el granjero multiplica las longitudes de los catetos, y este resultado se divide entre 2. Siguiendo este procedimiento, el área del terreno es
   A. $7m^2$
   B. $6m^2$
   C. $12m^2$
   D. $10m^2$

4. En la figura se muestra un hexágono regular y un ángulo θ.



Figura

   Pedro afirma que el ángulo θ debe ser menor o igual que $100°$. La afirmación de Pedro es
   A. Verdadera, porque la suma de las medidas de los ángulos internos de un hexágono regular es $90°(4) = 360°$.
   B. Verdadera, porque θ es uno de los angulos de un cuadrilátero, luego debe ser menor o igual que $\frac{360}{4} = 90°$.
   C. Falsa, porque $\frac{\theta}{2}$ es uno de los ángulos internos de un triángulo equilátero, luego θ debe ser igual que $60°(2) = 120°$.
   D. Falsa, porque la suma de las medidas de los ángulos de un hexágono regular es $180°(6) = 1.080°$.