	DISEÑO DEL SERVICIO	Código: M1- FOR07
		Versión: 02 agosto de 2022
	GUÍA DE NIVELACIÓN GRADO DÉCIMO	Año escolar: 2023 - 2024

Docente: José Ignacio García	Asignatura: Matemáticas	Grado: 10° A-B	Periodo: 4	Mes: Junio
Nombre del estudiante:				

GRÁFICAS DE TRANSFORMACIONES DE LAS FUNCIONES SENO Y COSENO

Consideremos que las gráficas de funciones son transformaciones e las funciones seno y coseno. Entonces, las técnicas para graficarlas son las mismas y útiles aquí. Las gráficas que obtenemos son importantes para entender las aplicaciones a situaciones físicas tales como el movimiento armónico, pero algunas de ellas son gráficos de atractivo aspecto que son importantes por si solas.

Es tradicional usar la letra x para denotar la variable del dominio de una función. Por lo tanto, de aquí en adelante usamos letra x y escribimos y= sen x, y= cos x, y = tan x y así sucesivamente para denotar estas funciones.

Ejemplo: Curvas de coseno

Trace la gráfica de cada función:

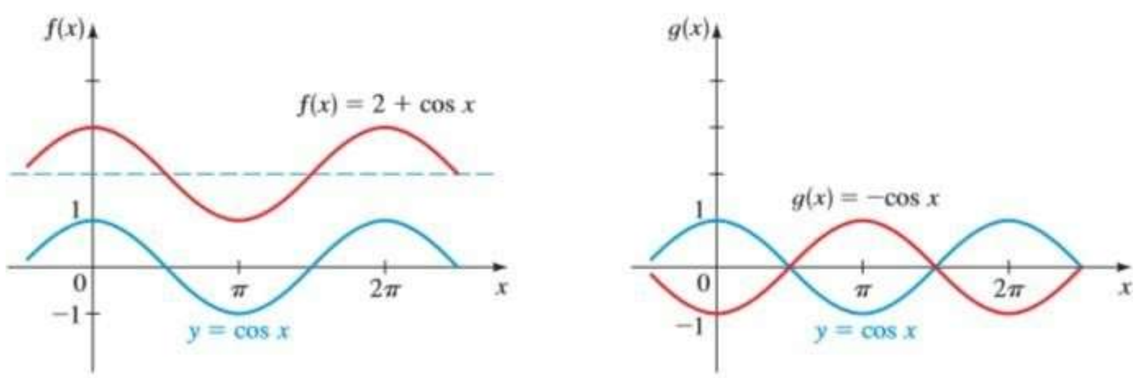
$\boldsymbol{a)\ f(x) = 2 + cos\ x}$ $\qquad$ $\boldsymbol{b)\ g(x) = -cos\ x}$

Solución:

$\boldsymbol{a)\ La\ gráfica\ de\ y = 2 + \cos\ x\ es\ la\ misma\ que\ la\ función\ y = \cos\ x, desplazada\ 2\ unidades}$

$\boldsymbol{b)\ La\ gráfica\ de\ y = -cos\ x\ en\ la\ es\ la\ reflexión\ de\ la\ gráfica\ y = cosx\ en\ el\ eje\ x.}$

(b) La gráfica de $y = -\cos x$ en la Figura 4(b) es la reflexión de la gráfica de $y = \cos x$ en el eje x.



(a) (b)

Identidades trigonométricas

Las **identidades trigonométricas** son igualdades que involucran funciones **trigonométricas** y se verifican para cualquier valor permitido de la variable o variables que se consideren, es decir, para cualquier valor que pudieran tomar los ángulos sobre los cuales se aplican las funciones.

Simplificación de expresiones trigonométricas

Las identidades hacen posible que escribamos la misma expresión en formas diferentes. A veces es posible reescribir una expresión de aspecto complicado como una mucho más sencilla. Para simplificar expresiones algebraicas, usamos factorización, denominadores comunes y las fórmulas de productos notables o diferencias de cuadrados perfectos.

En el siguiente cuadro tendremos algunas identidades fundamentales y su clasificación para usar al momento de simplificar o demostrar.

IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS FUNDAMENTALES

Identidades recíprocas

$$\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x} \qquad \sec x = \frac{1}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{1}{\tan x}$$

$$\tan x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

Identidades pitagóricas

$$\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad \tan^2 x + 1 = \sec^2 x \qquad 1 + \cot^2 x = \csc^2 x$$

Ejemplo 1: simplificación de una expresión trigonométrica

Simplifique la expresión $\boldsymbol{cos\, t + tan\, t\, .\, sen\, t}$.

Solución: Empezamos por reescribir en términos de seno y coseno:

$$\mathbf{cos\, t + tan\, t\, .\, sen\, t = cos\, t + \left(\frac{sen\, t}{cos\, t}\right).sent} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Identidad\ reciproca}$$

$$= \frac{\boldsymbol{cos^2 t + sen^2 t}}{\boldsymbol{cos\, t}} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Común\ denomidor}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos\, t}} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Identidad\ pitagórica}$$

$$= \boldsymbol{Sec\, t} \qquad \rightarrow \boldsymbol{Identidad\ reciproca}$$

Ejemplo 2: Simplificación por combinación de fracciones

Solución: Combinamos las fracciones usando denominadores comunes.

Simplifique la expresión: $\frac{sen\, x}{cos\, x} + \frac{cos\, x}{1+cos\, x}$

$$\frac{\boldsymbol{sen\, x}}{\boldsymbol{cos\, x}} + \frac{\boldsymbol{cos\, x}}{\mathbf{1} + \boldsymbol{cos\, x}} = \frac{\boldsymbol{Sen\, x(1 + sen\, x\,) + cos^2 x}}{\boldsymbol{Cos\, x(1 + sen\, x)}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{sen\, x + sen^2 x + cos^2 x}}{\boldsymbol{cos\, x\, (1 + sen\, x)}}$$

$$= \frac{\boldsymbol{Sen\, x + 1}}{\boldsymbol{cos\, x\, (1 + sen\, x)}}$$

$$= \frac{\mathbf{1}}{\boldsymbol{cos\, x}}$$

$$= \boldsymbol{Sec\, x}$$

GUÍA PARA DEMOSTRAR IDENTIDADES TRIGONOMÉTRICAS

1. **Empezar con un lado:** Escoger un lado de la ecuación y escribirlo. El objetivo es transformarlo en el otro lado. Suele ser más fácil empezar con el lado más complicado.
2. **Usar identidades conocidas:** Use álgebra y las identidades que conozca para combinar el lado con que empezó. Lleve las expresiones fundamentales para simplificar expresiones.
3. **Convertir en senos y cosenos:** si se ha quedado bloqueado, puede que encuentre útil reescribir todas las funciones en términos de senos y cosenos.

Preguntas tipo saber

1. La expresión $cos^2 x + sen^2\, x = 1$ se puede expresar como

A. $(sen\, x + \cos x\,)(sen\, x - cosx) = 1$

B. $(1 - cosx)(1 + \cos x) = sen^2 x$

C. $(sen\, x + \cos x)^2 = 1$

D. $(1 + \cos x)(1 + \cos x) = sen^{\,2}\, x$

2. Al simplificar términos en una demostración de identidades trigonométricas podemos

A. Despejar variables de un lado a otro

B. Simplificar en términos de seno y coseno a ambos lados de la igualdad al tiempo

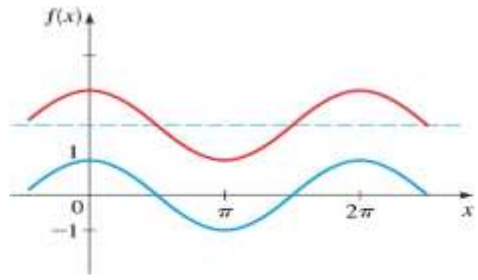
C. simplificar en términos de seno y coseno a un solo lado de la igualdad, para llegar al otro

D. despejar cada lado de la igualdad de forma independiente

3. La identidad $\tan x \,.\, \cot x$ es
A. 0 porque se simplifican todas sus expresiones
B. 1 porque se simplifican todos sus términos de seno y coseno
C. Imposible de hacer o demostrar porque no tiene identidades reciprocas o pitagóricas para reemplazar
D. -1 porque son identidades reciprocas

Resuelva las preguntas 4, 5 y 6 con base a lasiguiente información.

Analiza la siguiente grafica



4. La grafica de la parte inferior corresponde a
A. $y = sen\ x$
B. $y = \cos x$
C. $y = -sen\ x$
D. $y = -\cos x$

5. La segunda grafica en la parte superior describe un desplazamiento vertical de la gráfica inferior. Su ecuación es
A. $y = sen\ x + 2$
B. $y = \cos x + 2$
C. $y = 2sen\ x$
D. $y = 2\cos x$

6. Los ángulos en que alcanza su punto más alto la gráfica corresponden a
A. 0°, π y 2π
B. 0° y π
C. 0° y 2 π
D. 0° y 3/2 π

7. La identidad reciproca de cosecante está dad en función de
A. Seno
B. Coseno
C. Tangente
D. Cotangente

8. Se plantea la función pitagórica de secante en función de tangente y se obtiene
A. $tan^2x - 1$
B. $tan^2x + 1$
C. $sec^2x - 1$
D. $sec^2x + 1$

Ejercicios para practicar

1. **Graficar las siguientes funciones trigonométricas**
A. $\boldsymbol{y = sen\ x}$
B. $\boldsymbol{y = 2\cos 2x}$
C. $\boldsymbol{y = 2sen\left(x - \frac{3}{2}\right)}$
D. $\boldsymbol{y = \cos x + 1}$

2. **Demuestre y simplifique cada una de las siguientes identidades trigonométricas**
A. $\boldsymbol{\frac{cos\ u\ sec\ u}{tan\ u} = \cot u}$

B. $\boldsymbol{\frac{tan\ x}{sec\ x} = senx}$

C. $\boldsymbol{\frac{1+sen\ x}{1-sen\ x} - \frac{1-sen\ x}{1+sen\ x} = 4\tan x \sec x}$

D. $\boldsymbol{2cos^2x - 1 = 1 - 2sen^2x}$

E. $\frac{1}{1-sen^2y} = 1 + tan^2y$

Permutación, combinación y probabilidad

Definición de permutación: Una permutación es una reordenación de elementos. En otras palabras, es una forma de organizar un conjunto de elementos en un orden específico.

Fórmula para calcular permutaciones: La fórmula general para calcular el número de permutaciones de un conjunto de elementos es:

P(n, r) = n! / (n - r)!

Donde:

P(n, r) representa el número de permutaciones de n elementos tomados de r en r.

n! es la factorial de n, que es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n.

(n - r)! es la factorial de (n - r).

Permutaciones con elementos distintos: Cuando todos los elementos son distintos, el número de permutaciones es simplemente la factorial del número total de elementos.

Ejemplo: Si tienes 5 elementos distintos (A, B, C, D, E), ¡el número de permutaciones posibles sería 5! = 5 x 4 x 3 x 2 x 1 = 120.

Permutaciones con elementos repetidos: Cuando hay elementos repetidos en el conjunto, la fórmula general necesita ser ajustada para considerar la repetición. Supongamos que tienes n elementos, de los cuales n1 son del tipo 1, n2 son del tipo 2, y así sucesivamente. Entonces, el número de permutaciones se calcula de la siguiente manera:

P = n! / (n1! x n2! x ... x nk!)

Donde n1, n2, ..., nk representan la cantidad de elementos repetidos de cada tipo.

Ejemplo: Si tienes la palabra “ABRIL”, donde hay 5 letras en total, pero “L” se repite dos veces, ¡entonces el número de permutaciones sería 5! / (2! x 1! x 1! x 1! x 1!) = 60.

Permutaciones circulares: En las permutaciones circulares, se considera el orden relativo pero no el punto de inicio. ¡El número de permutaciones circulares de un conjunto de n elementos es (n - 1)!

Ejemplo: Si tienes los elementos A, ¡B, C, el número de permutaciones circulares sería (3 - 1)! = 2!

Recuerda que estas son solo las bases de las permutaciones y que hay conceptos más avanzados y aplicaciones en combinaciones y problemas de probabilidad que puedes explorar. Espero que esta guía te sea útil para comenzar con las permutaciones.

Definición de combinación: Una combinación es una selección de elementos sin importar el orden en el que se eligen. A diferencia de las permutaciones, en las combinaciones el orden de los elementos no importa.

Fórmula para calcular combinaciones: La fórmula general para calcular el número de combinaciones de un conjunto de elementos es:

C(n, r) = n! / (r! * (n - r)!)

Donde:

C(n, r) representa el número de combinaciones de n elementos tomados de r en r.

n! es la factorial de n, que es el producto de todos los números enteros positivos desde 1 hasta n.

r! es la factorial de r.

(n - r)! es la factorial de (n - r).

Combinaciones sin repetición: Las combinaciones sin repetición se utilizan cuando no se permite seleccionar el mismo elemento más de una vez. En este caso, el número de combinaciones se calcula utilizando la fórmula mencionada anteriormente.

Ejemplo: Si tienes un conjunto de 5 elementos (A, B, C, D, E) y deseas seleccionar 3 elementos, el número de combinaciones posibles sería C(5, 3) = 5! / (3! * (5 - 3)!) = 10.

Combinaciones con repetición: Las combinaciones con repetición se utilizan cuando se permite seleccionar el mismo elemento más de una vez. En este caso, el número de combinaciones se calcula utilizando la siguiente fórmula:

C(n + r - 1, r)

Donde:

n es el número de elementos distintos.

r es el número de elementos seleccionados.

Ejemplo: Si tienes 3 tipos de dulces (A, B, C) y deseas seleccionar 4 dulces en total, el número de combinaciones posibles sería C(3 + 4 - 1, 4) = C(6, 4) = 15.

Recuerda que estas son solo las bases de las combinaciones y que hay conceptos más avanzados y aplicaciones en problemas de probabilidad y estadística que puedes explorar. Espero que esta guía te sea útil para comenzar con las combinaciones.

Definición de probabilidad: La probabilidad es una medida numérica de la posibilidad de que ocurra un evento. Se expresa como un número entre 0 y 1, donde 0 indica que el evento es imposible y 1 indica que el evento es seguro de ocurrir.

Espacio muestral y eventos: El espacio muestral es el conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio. Un evento es un subconjunto del espacio muestral, es decir, una colección de resultados posibles.

Probabilidad de un evento: La probabilidad de un evento se calcula dividiendo el número de resultados favorables (casos en los que el evento ocurre) entre el número total de resultados posibles. Se puede expresar como una fracción, decimal o porcentaje.

P(A) = Número de resultados favorables / Número total de resultados posibles

Valores de probabilidad

Ejercicios propuestos

1. En una baraja de cartas, se extrae una carta al azar. Si se sabe que la carta es un as, ¿cuál es la probabilidad de que sea de corazones?
2. En un grupo de estudiantes, el 60% son hombres y el 40% son mujeres. Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea mujer, sabiendo que es mayor de 25 años?
3. En una fábrica, se producen tres tipos de productos: A, B y C. El 20% de los productos son defectuosos. Si se selecciona un producto al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea del tipo C, si se sabe que es defectuoso?
4. En una ciudad, el 70% de los conductores usa el cinturón de seguridad, mientras que el 30% no lo usa. Si se selecciona un conductor al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no use el cinturón de seguridad, sabiendo que ha sido multado previamente por no usarlo?
5. En una escuela, el 40% de los estudiantes practica fútbol y el 60% practica baloncesto. Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que practique fútbol, si se sabe que es niño?
6. En una empresa, el 80% de los empleados tiene al menos una carrera universitaria, mientras que el 20% no tiene estudios universitarios. Si se selecciona un empleado al azar, ¿cuál es la probabilidad de que no tenga estudios universitarios, sabiendo que tiene más de 10 años de experiencia laboral?
7. En una bolsa hay 10 bolas rojas y 15 bolas azules. Se selecciona una bola al azar y luego se coloca de nuevo en la bolsa junto con una bola adicional del mismo color. Si se selecciona otra bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que ambas bolas sean rojas?
8. En un grupo de estudiantes, el 60% estudia matemáticas y el 40% estudia física. Si se selecciona un estudiante al azar, ¿cuál es la probabilidad de que estudie matemáticas, si se sabe que es mujer?

Recuerda que la probabilidad condicional se calcula dividiendo la probabilidad del evento conjunto entre la probabilidad del evento condicional. ¡Puedes intentar resolver estos ejercicios y verificar tus respuestas!