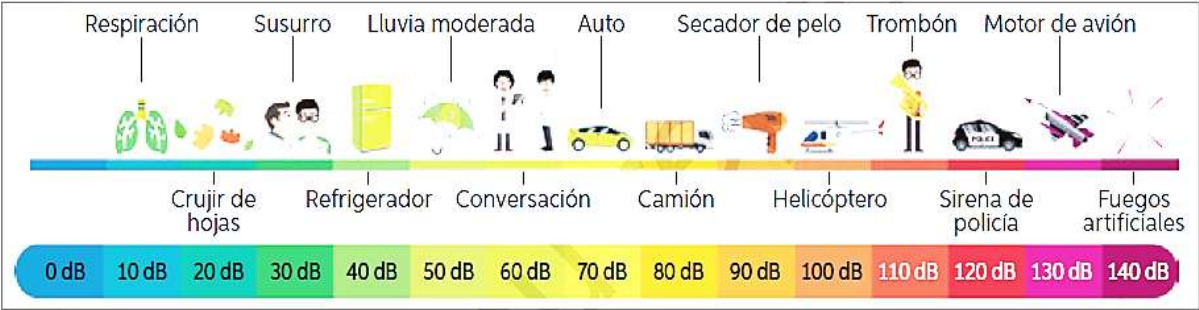


|                                                                                   |                                      |                         |  |          |                             |            |
|-----------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------|-------------------------|--|----------|-----------------------------|------------|
|  | DISEÑO DEL SERVICIO                  |                         |  |          | Código: M1- FOR07           |            |
|                                                                                   |                                      |                         |  |          | Versión: 02 agosto del 2022 |            |
|                                                                                   | GUÍA DE NIVELACIÓN DE CUARTO PERIODO |                         |  |          | Año escolar: 2022 - 2023    |            |
| Docente: José Ignacio García                                                      |                                      | Asignatura: Matemáticas |  | Grado: 9 | Periodo: Cuarto periodo     | Mes: Junio |
| Nombre:                                                                           |                                      |                         |  |          |                             | Montado    |

Funciones logarítmicas y exponenciales

La intensidad del sonido se mide en vatios por metro cuadrado (W/m²). La menor intensidad que puede captar el oído humano, llamado umbral de audición, es 10<sup>-12</sup> W/m². A partir de 1 W/m², comienza el umbral del dolor en el oído. Para comparar un sonido cualquiera con la menor intensidad audible, se utiliza la siguiente función:

$\beta(l) = 10\log\left(\frac{l}{l_0}\right)$ , donde  $\beta$  es el nivel de intensidad sonora medido en decibeles (dB),  $l$  es la intensidad del sonido en W/m² e  $l_0$  es el umbral de audición (10<sup>-12</sup> W/m²).



Lo que acabas de leer corresponde a una situación de Modelamiento matemático para describir y predecir, que en este caso utiliza la función logaritmo y exponencial.

Te invitamos a continuación a ver qué maneras estas y otras situaciones se pueden aplicar modelos matemáticos que utilizan funciones logarítmicas y exponencial.

Debes considerar los conocimientos previos siguientes:

- Funciones (definición, dominio, recorrido, evaluar)
- Cálculo de Potencias y Logaritmos (propiedades y relación entre ellas)

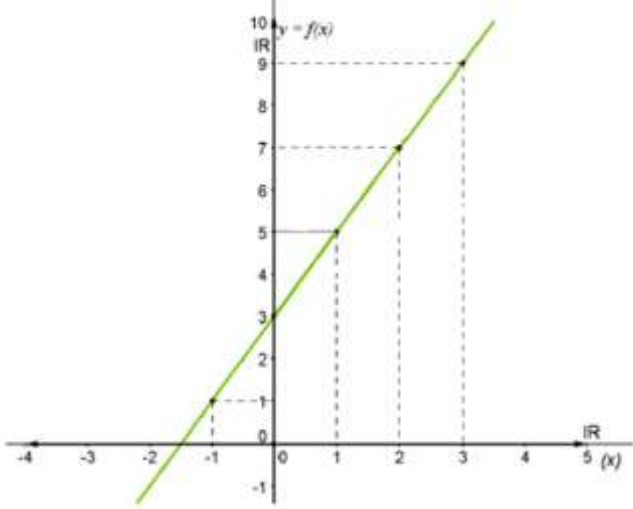


Antes de comenzar, debemos recordar conceptos base para continuar.

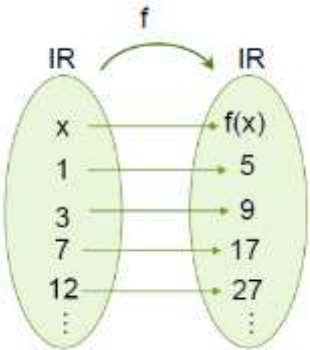
Una “FUNCIÓN f” es una relación, tal que todo elemento del conjunto de partida tiene imagen, y esta es única.

Por ejemplo: el diagrama a la derecha corresponde a la función

$f(x) = 2x + 3$



Es importante también recordar cómo es la gráfica de una función. A la izquierda se encuentra la gráfica de la función f(x) antes mencionada.



Cuando x es 1, el valor de y es 5. Luego, f(1) = 5.

Es decir,  $y = f(x) \rightarrow (x, y)$   
punto en el plano cartesiano

**Dominio:** Es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de partida que son preimagen de algún elemento del conjunto de llegada.

**Recorrido:** Es el conjunto formado por todos los elementos del conjunto de llegada que son imagen de algún elemento del conjunto de partida.

Hay que recordar que existen distintos tipos de funciones, entre ellas están: Función Lineal, Función Afín, Función Exponencial, Función Logarítmica, Función Raíz cuadrada, Función Cuadrática, Función Potencia, Inversa de una función. En esta oportunidad estudiaremos la **FUNCIÓN LOGARÍTMICA**. Por ello debemos recordar qué **es un logaritmo**  
El logaritmo de un número, en una base dada, es el exponente al cual se debe elevar la base para obtener dicho número.

$$\log_a x = y \Rightarrow a^y = x$$

Siendo **a** la **base (positiva – {1})**, **x** el **número ( x > 0 )** e **y** el **logaritmo**.

Se lee: “Logaritmo de x en base a es igual a y”

Por ejemplo:  $2^4 = 16 \Leftrightarrow 4 = \log_2 16$

**Función logarítmica**

La función logarítmica en base **a** es la función inversa de la exponencial en base **a**.

Una función Logarítmica está definida por:

$$f(x) = \log_a x$$

Con **a**  $\in \mathbb{R}^+$  y distinta de 1 y **x** > 0

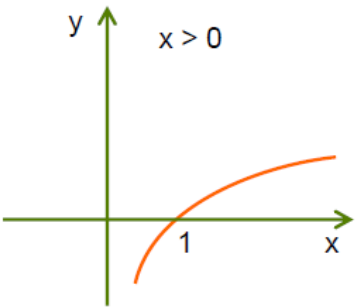
Como puedes observar la variable “x” se encuentra en el Logaritmo. Por ello su nombre.

Se da la relación:

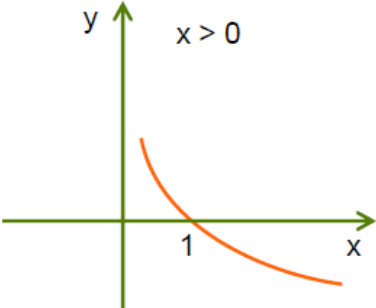
$$y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$$

De acuerdo con las características de los elementos de la función logarítmica, su grafica puede ser:

a) Si **a > 1**, **f(x) = log<sub>a</sub>(x)**



b) Si **0 < a < 1**, **f(x) = log<sub>a</sub>(x)**



Algunas **CARACTERÍSTICAS** de la función logarítmica:

- Su **DOMINIO** es el conjunto de todos los números reales positivos (**R+**).
- Su **RECORRIDO** es el conjunto de todos los números reales (**R**)
- La grafica intersecta al eje x en el punto (1,0)
- Si **a > 1**, entonces la función es creciente (ver grafica a)
- Si **0 < a < 1**, entonces la función es decreciente (ver grafica b)
- La curva de la gráfica no intersecta (ni toca) el eje Y (en su forma básica, si es trasladada entonces sí)
- La función logarítmica es inversa de la función exponencial.

Existen varios fenómenos o situaciones de la naturaleza que son modelados mediante una función logarítmica. Por ejemplo: la intensidad del sonido, la magnitud de un sismo, la escala del pH, entre otros. Veremos algunos de estos ejemplos en la práctica guiada.

**Propiedades de los logaritmos**

Las propiedades de los logaritmos son reglas matemáticas que nos permiten simplificar y manipular expresiones logarítmicas de manera más conveniente. Estas propiedades son útiles en diversos campos de las matemáticas y las ciencias, y tienen aplicaciones prácticas en problemas relacionados con la resolución de ecuaciones, el análisis de datos y la modelización de fenómenos.

A continuación, te menciono algunas de las principales aplicaciones de las propiedades de los logaritmos:

1. **Simplificación de expresiones:** Las propiedades de los logaritmos nos permiten combinar logaritmos de diferentes bases y simplificar expresiones logarítmicas complicadas en formas más manejables. Por ejemplo, podemos usar la propiedad del producto para combinar dos logaritmos en un solo logaritmo.
2. **Resolución de ecuaciones:** Las propiedades de los logaritmos nos ayudan a resolver ecuaciones logarítmicas. Podemos aplicar las propiedades para simplificar la ecuación y luego deshacernos del logaritmo para obtener la solución.
3. **Cambio de base:** Las propiedades de los logaritmos nos permiten cambiar la base de un logaritmo a otra base deseada. Esto es útil cuando trabajamos con logaritmos en una base específica y necesitamos convertirlos a una base diferente.

4. Análisis de datos y escalas: Los logaritmos se utilizan para comprimir y visualizar datos que abarcan rangos muy amplios. Al aplicar logaritmos a los valores, podemos convertir escalas exponenciales en escalas lineales, lo que facilita la interpretación y comparación de datos.
5. Modelización de fenómenos: En muchas disciplinas científicas, como la física, la química y la biología, los logaritmos se utilizan para modelar relaciones entre variables que siguen un crecimiento o una decaída exponencial. Por ejemplo, la ley de decaimiento radiactivo y la ley de enfriamiento de Newton se expresan en términos de logaritmos.

En resumen, las propiedades de los logaritmos nos proporcionan herramientas poderosas para simplificar expresiones, resolver ecuaciones, analizar datos y modelar fenómenos en diversos campos de las matemáticas y las ciencias. Nos permiten manipular logaritmos de manera más eficiente y facilitan la comprensión y resolución de problemas relacionados con las funciones logarítmicas.

| Propiedades de Logaritmos |                                                                      |
|---------------------------|----------------------------------------------------------------------|
| Logaritmo de un producto  | $\log_a(m.n) = \log_a m + \log_a n$                                  |
| Logaritmo de un cociente  | $\log_a\left(\frac{m}{n}\right) = \log_a m - \log_a n$               |
| Logaritmo de una potencia | $\log_a m^r = r.\log_a m$                                            |
| Logaritmo de una raíz     | $\log_a \sqrt[n]{m} = \log_a m^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}.\log_a m$ |
| Logaritmo de uno          | $\log_a a = 1$                                                       |
| Cambio de base            | $\log_b a = \frac{\log_c a}{\log_c b}$                               |

Leyes de los logaritmos

|          |                                         |
|----------|-----------------------------------------|
| Producto | $Log_a(x.y) = Log_a x + Log_a Y$        |
| Cociente | $Log_a \frac{x}{y} = Log_a^x - Log_a^y$ |
| Potencia | $Log_a^{(x.y)} = y.Log_a^x$             |
| Raíz     | $Log_a \sqrt[n]{x} = \frac{Log_a^x}{n}$ |

Sucesiones aritméticas

**Definición:** Una sucesión aritmética es una secuencia de números en la que la diferencia entre dos términos consecutivos es constante. Se denota comúnmente como {an}, donde "a" es el primer término y "d" es la diferencia común.

**Término general:** El término general de una sucesión aritmética se puede calcular utilizando la fórmula  $a_n = a_1 + (n-1) * d$ , donde "an" es el término enésimo, "a1" es el primer término y "d" es la diferencia común.

**Suma de los primeros "n" términos:** La suma de los primeros "n" términos de una sucesión aritmética se puede calcular utilizando la fórmula  $S_n = (n/2) * (a_1 + a_n)$ , donde "Sn" es la suma de los primeros "n" términos.

Propiedades de las sucesiones aritméticas:

La diferencia común "d" determina cómo los términos cambian entre sí.

Si "d" es positivo, la sucesión es creciente.

Si "d" es negativo, la sucesión es decreciente.

Si "d" es cero, todos los términos son iguales y la sucesión es constante.

Aplicaciones de las sucesiones aritméticas:

En matemáticas financieras, las sucesiones aritméticas se utilizan para calcular pagos periódicos, amortizaciones y otros problemas relacionados con flujos de efectivo.

En física, las sucesiones aritméticas se utilizan para modelar el movimiento uniforme, en el que la posición cambia en incrementos constantes con respecto al tiempo.

En programación y ciencias de la computación, las sucesiones aritméticas se utilizan para generar secuencias numéricas y controlar bucles.

Recuerda que, en una sucesión aritmética, cada término se obtiene sumando la diferencia común al término anterior. Puedes usar la fórmula del término general y la fórmula de la suma para calcular términos individuales y sumas parciales respectivamente. ¡Espero que esta guía te sea útil para comprender las sucesiones aritméticas!

**Ejercicios**

1. Evaluar los siguientes logaritmos

A.  $\text{Log}_2 256 =$       B.  $\text{Log}_4 64$       C.  $\text{Log}_9 729 =$       D.  $\text{Log}_5 3125 =$

2. Ampliar las siguientes expresiones de logaritmos según las leyes de los logaritmos

A.  $\text{Log}_a \frac{x^{3^4} \sqrt{y}}{z^5}$       B.  $\text{Log} \frac{a^3 b^8}{r^6}$       C.  $\text{Log}_2 x^3 y^4 \sqrt{z}$       D.  $\text{Log}_2 \sqrt{a^3 b^5}$

3. Simplificar las siguientes expresiones aplicando leyes de los logaritmos

A.  $3\text{Log}_2 x + \frac{2}{3}\text{Log}_2 y - \text{Log}_2 z$       B.  $\text{Log}_a b - \text{Log}_a b - \text{Log}_a C$

4. Resuelva las siguientes ecuaciones logarítmicas

A.  $\text{Log}_2 64 = x$       B.  $3 + \text{Log} x = 6$       C.  $\text{Log}_2 (x - 2) - 1 = 2$       D.  $\text{Log} x = 5$

5. Evalúe si las siguientes sucesiones y diga si son o no aritméticas

A. 3, 7, 10, 14 ...      B.  $\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, \frac{3}{4} \dots$       C. -10, -8, -6, -2, ...      D. 5, 10, 15, 25, ...

6. En un torneo de ajedrez, el número de participantes aumenta en 4 cada año. Si en el año 2020 había 100 participantes, ¿en qué año habrá 200 participantes?
7. Una empresa tiene un programa de incentivos en el que cada mes aumenta el salario de sus empleados en \$200. Si el primer salario es de \$1000, ¿cuál será el salario en el mes número n?
8. Un estudiante está ahorrando dinero para comprar un libro que cuesta \$30. Cada semana, ahorra \$5 adicionales al ahorro acumulado. ¿En qué semana tendrá suficiente dinero para comprar el libro?